Barem de notare, clasa a XII a

1) Avem imediat că dacă f este bijectivă,atunci şi g este bijectivă.Presupunând că g admite primitive,avem că g are proprietatea lui Darboux.Fiind şi injectivă, g este strict monotonă. **(2p)**

Pentru $x=0$,avem $g(g(0))=f(0)$;dacă $g(0)=0 \Rightarrow f(0)=0$,contradicție cu ipoteza,aşadar $g(0)=k\in(0,\infty)$. **(2p)**

Presupunem acum că g este strict crescătoare şi astfel ajungem la $g(g(x))>g(0)=k>0 \Rightarrow f(x)>k>0, \forall x\in\mathbb{R}$,adică există $y\in(0,k)$ pentru care $f(x)\neq y, \forall x\in\mathbb{R}$,contradicție cu surjectivitatea lui f. **(2p)**

Analog dacă g este strict descrescătoare,aşadar nu există funcții g cu proprietatea din enunț. **(1p)**

2) a) Prin reducere la absurd, presupunem că există $x\in G, x\neq e$ cu $x^2=e$ (*) .Pe de altă parte, pentru orice $a\in G \Rightarrow a=ae^2=ae=ea=x^2a$ şi astfel condiția din enunț conduce la $e=x$,contradicție cu (*) ; **(3p)**

b) pentru x,y **oarecare** din G avem : $y(xy)^2=yxyx$ şi $(yx)^2y=yxyxy$,deci $y(xy)^2=(yx)^2y$ şi,folosind aceeaşi condiție din enunț, deducem $xy=yx$; **(2p)**

c)dacă $x,y,z\in G$ satisfac $xy^2=z^2x$ (●) , din b) avem $xy^2=z^2x \Rightarrow y^2=z^2, \forall y,z\in G$ (**).

Pe de altă parte, avem $\left(yz^{-1}\right)^2=yz^{-1}yz^{-1}=y^2z^{-2}$ şi,cu (**), deducem $(yz^{-1})=e$. Folosim acum condiția a) şi avem $(yz^{-1})=e \Rightarrow y=z$ (●●). **(2p)**

3) Se arată imediat că grupul este abelian. **(3p)**

Acum,avem că $g(ax)=f(ax)f(a^2x)=f(ax)f(x)=g(x), \forall x\in G$; **(2p)**

dacă g este injectivă,am obține $ax=x, \forall x\in G$,de unde $a=e$,contradicție. **(2p)**

4) $I=\int e^{arctgx}dx+\int \frac{x}{x^2+1}\cdot e^{arctgx}dx = xe^{arctgx}-\int \frac{x}{x^2+1}\cdot e^{arctgx}dx+\int \frac{x}{x^2+1}\cdot e^{arctgx}dx$ $=xe^{arctgx}+C$. **(7p)**